Conclusion : $\lim = -1$ donc D : y = -1 est une asymptote horizontale à Cf au voisinage de $-\infty$

2°/

a) On a : $-1 \leq \cos x \leq 1$

D'où : $\frac{-2}{\sqrt{x}} \leq \frac{\cos x - 1}{\sqrt{x}} \leq 0$ pour $x > 0$

b) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x}} = 0 \\ et\ \sqrt{x} > 0 : \frac{-2}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f = 0$

D'où : D' : y = 0 est ue asymptote horizontale à Cf au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} f = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} -\sqrt{x}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right) = 0 \times 0 = 0$$

3°/ $\lim\limits_{x \to 0^-} f = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{0}{\sqrt{1}} = 0$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f = \lim\limits_{x \to 0^-} f = 0 = f(0)$

D'où f est continue en 0

b) $* \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$* \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} -\sqrt{x}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$= 0 \times \frac{1}{2} = 0 = f'_d(0)$$

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ d'où f n'est pas dérivable en 0

Cf admet deux demi-tangentes en 0

$$T_1 : \begin{cases} y = x \\ x \leq 0 \end{cases} ; \quad T_2 : \begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$